

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Войтик, Н. Г. Мигранов, Преобразование аффинной скорости и его применение для вращающегося диска, *Челяб. физ.-матем. журн.*, 2020, том 5, выпуск 4(1), 428–450

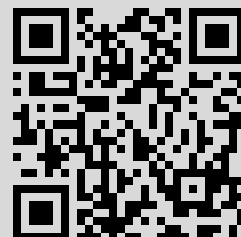
DOI: <https://doi.org/10.47475/2500-0101-2020-15404>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 81.30.203.106

16 февраля 2021 г., 07:51:23



ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АФФИННОЙ СКОРОСТИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА

В. В. Войтик^a, Н. Г. Мигранов^b

Башикирский государственный медицинский университет, Уфа, Россия

^avoytik1@yandex.ru, ^bufangm@yandex.ru

Цель статьи заключается в поиске преобразования, которое связывает локальную аффинную скорость нежёсткого тела в лабораторной инерциальной системе отсчёта S с центроаффинной скоростью этого тела в сопутствующей невращающейся системе отсчёта k . Данная работа основывается на кинематике сплошной среды и обобщённом преобразовании Лоренца. В статье указано преобразование скорости, связывающее систему отсчёта S и систему отсчёта k , которая движется без вращения. При этом движение различных точек жёсткой системы k является неоднородным. С помощью этих формул получено искомое прямое и обратное преобразования аффинной скорости. Рассмотрены важные частные случаи: движение частиц в однородном силовом поле и прецессия Томаса. В качестве примера использования преобразования аффинной скорости в S рассмотрено жёсткое ускоренное вращение диска и вычислена локальные угловая скорость и величина деформации его точек. При этом вычисленный коэффициент растяжения согласуется с известным, а найденная формула для угловой скорости более общая, чем ранний результат, полученный для равномерного вращения диска.

Ключевые слова: обобщённое преобразование Лоренца, аффинное движение, угловая скорость, скорость деформации, прецессия Томаса, вращение Вигнера.

Введение

Сокращение Лоренца запрещает существование абсолютно жёстких систем отсчёта. Действительно, если произвольная локальная система отсчёта движется так, что сохраняет свои размеры относительно лабораторной системы S , то она является нежёсткой системой [1]. Наоборот, при неинерциальном движении жёсткой системы отсчёта её размеры в лабораторной системе вследствие сокращения Лоренца изменяются, она выглядит нежёсткой (например, [2]). По этой причине в релятивистской теории не обойтись без рассмотрения нежёсткого движения как относительно невращающейся сопутствующей локальной жёсткой системы k , так и относительно S . Необходимо выяснить важную связь между центроаффинным¹ нежёстким движением внутри k и этим же движением относительно S .

Аналитически локальное центроаффинное движение сводится к системе однородных дифференциальных уравнений первого порядка (см. далее формулу (1)).

¹Геометрически аффинное преобразование [3, с. 267–285] — это отображение пространства в себя, при котором параллельные прямые переходят в параллельные прямые, пересекающиеся — в пересекающиеся. Центроаффинное преобразование сохраняет начало координат.

В этих уравнениях скорость изменения радиус-вектора пропорциональна с переменным тензорным коэффициентом самому искомому вектору. Данный коэффициент предлагается называть аффинной скоростью. Аффинные скорости в системах отсчёта k и S связаны некоторым локальным линейным преобразованием. Его требуется вычислить. Аффинная скорость в лабораторной системе в том случае, когда аффинная скорость в системе k отсутствует, была вычислена в [2, формула (14)] для жёсткого стержня. В данной статье исследуется наиболее общий случай нежёсткого движения в системе k .

Следует упомянуть, что аффинное движение чрезвычайно часто встречается в механике сред. Практически любое нетурбулентное движение среды локально является аффинным. Найденное преобразование аффинной скорости можно использовать для вычисления собственных кинематических характеристик сгустков частиц, движущихся в релятивистском ускорителе.

В следующих параграфах мы рассматриваем некоторые предварительные сведения о методах исследования, которые важны для дальнейшего изложения. Забегая вперёд, укажем, что статья основывается на двух теориях: релятивистской специальной теории относительности (СТО) и классической кинематики сплошной среды (КСС) [4]. При этом компетенция КСС касается некоторых утверждений в сопутствующей системе отсчёта и аналогичных утверждений в лабораторной системе. СТО же использует заключения, касающиеся перехода между лабораторной и сопутствующей системой отсчёта. Следовательно, в данном случае эти теории не противоречат друг другу.

1. Методы исследования

1.1. Метод Эйлера

Согласно Эйлеру с некоторой точкой O сплошной среды связывается сопутствующая локальная жёсткая система отсчёта k . Система k не связана с другими точками среды. Подход Эйлера заключается в исследовании изменения величин, описывающих движение в каждой из точек пространства k , в которые с течением времени могут приходить различные точки среды. Движение точки A среды относительно точки O мы будем называть *аффинным*, если расстояние $|OA|$ достаточно мало. Вектор $\overrightarrow{OA}$ можно физически представить в виде нежёсткого стержня. При этом все точки стержня с течением времени совершают однотипное движение так, что его форма остаётся линейной, не искривляется. Определим кинематику движения стержня.

Возьмём в качестве системы отсчёта k , которая сопутствует одной из точек среды, точке O , прямоугольную систему координат. Пусть в движущейся системе s известна скорость точек среды u^α как функция времени t и координаты r^α :

$$\frac{dr^\alpha}{dt} = u^\alpha(r^\beta, t).$$

Функцию $u^\alpha(r^\beta, t)$ можно разложить в ряд по степеням r^β . Скорость точки O (при $r^\alpha = 0$) равна нулю: $u^\alpha|_{r^\alpha=0} = 0$. Поэтому, ограничиваясь первой степенью разложения в ряд, мы получаем систему однородных линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dr^\alpha}{dt} = \omega^{\alpha\beta} r^\beta. \quad (1)$$

Решив систему (1), можно найти зависимость координат r^α от времени и от трёх произвольных постоянных.

Аналогичное движение точек происходит в лабораторной системе отсчёта. Аффинное движение нежёсткого стержня в лабораторной системе отсчёта подчиняется уравнению

$$U^\alpha = V^\alpha + \Omega^{\alpha\beta} L^\beta, \quad (2)$$

где $\mathbf{U}$ — скорость конца стержня, $\mathbf{V}$ — скорость начала стержня, $\mathbf{L}$ — его длина в лабораторной системе отсчёта. Учитывая, что

$$U^\alpha - V^\alpha = \frac{dL^\alpha}{dT},$$

равенство (2) можно записать как

$$\frac{dL^\alpha}{dT} = \Omega^{\alpha\beta} L^\beta. \quad (3)$$

Таким образом, в кинематике стержня его неинерциальность учитывается вектором ускорения $\mathbf{A} = \dot{\mathbf{V}}$ и тензором лабораторной $\Omega^{\alpha\beta}$ или собственной $\omega^{\alpha\beta}$ *аффинной скорости*. В релятивистской физике эти тензоры отличаются друг от друга.

Возникает вопрос о смысле компонент этого тензора. Удобно разложить тензор собственной аффинной скорости на симметричную часть $s^{\alpha\beta}$ и антисимметричную, где антисимметричная часть тензора $\omega^{\alpha\beta}$, как известно, дуальна некоторому вектору ω^γ :

$$\omega^{\alpha\beta} = s^{\alpha\beta} + e^{\alpha\gamma\beta} \omega^\gamma. \quad (4)$$

При этом величины $s^{\alpha\beta}$, ω^γ есть

$$\omega^\alpha = \frac{1}{4} e^{\alpha\mu\nu} (\omega^{\nu\mu} - \omega^{\mu\nu}), \quad (5)$$

$$s^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\omega^{\alpha\beta} + \omega^{\beta\alpha}). \quad (6)$$

Тензор $s^{\alpha\beta}$ называется тензором *скорости деформации*. Физический смысл этих величин выясняется при подстановке (4) в (1). Перейдём в систему отсчёта, вращающуюся с угловой скоростью ω^γ . В такой системе отсчёта правая часть уравнения (1) имеет вид

$$u^\alpha = s^{\alpha\beta} r^\beta. \quad (7)$$

Выберем теперь такую систему координат, в которой тензор $s^{\alpha\beta}$ принимает диагональный вид. В такой системе координат

$$s^{\alpha\beta} = s^{(\alpha)} \delta^{\alpha\beta}.$$

Главные значения $s^{(\alpha)}$ этого тензора вдоль оси α определяются из уравнения

$$|s^{\alpha\beta} - s^{(\alpha)} \delta^{\alpha\beta}| = 0, \quad (8)$$

где по индексу, стоящему в скобке, суммирование нет. Орты n^α новой системы координат определяются из уравнения $s^{\alpha\beta} n^\beta = s^{(\alpha)} n^\alpha$. Уравнение (7) будет иметь следующую форму:

$$u^\alpha = \frac{\partial r^\alpha}{\partial t} = s^{(\alpha)} r^\alpha.$$

Решая это дифференциальное уравнение методом разделения переменных, получим, что

$$\frac{r^\alpha}{r_0^\alpha} = \exp \int_0^t s^{(\alpha)} dt. \quad (9)$$

С другой стороны, отношение r^α/r_0^α есть коэффициент относительного удлинения оси α . Следовательно, если тензор аффинной скорости имеет общий вид, говорить только о вращении неправильно. Зная же тензор аффинной скорости $\omega^{\alpha\beta}$, можно найти как главные векторы и главные значения тензора деформации вдоль них, так и угловую скорость вращения главных осей. При этом ω представляет собой угловую скорость вращения главных осей тензора $s^{\alpha\beta}$, а главное значение этого тензора является скоростью относительного удлинения соответствующей главной оси.

1.2. Метод обобщённого преобразования Лоренца

При решении задач в СТО возможны тоже два метода рассмотрения неинерциальных систем отсчёта.

Один из них (исторически первый) вообще игнорирует неинерциальные системы отсчёта. Для моделирования неинерциальной системы отсчёта применяется метод мгновенно сопутствующих систем отсчёта, восходящий ещё к А. Эйнштейну. Суть метода состоит в том, что неинерциальная система отсчёта s^2 в два последовательных момента времени заменяется на инерциальные системы отсчёта i и i' , которые в эти моменты времени мгновенно совпадают и сопутствуют неинерциальной системе s . Такое моделирование применяется для того, чтобы можно было использовать преобразования Лоренца между лабораторной системой и системами i и i' . В классическом учебнике [5] с помощью этого метода фактически были рассмотрены две системы i и i' , которые движутся со скоростями $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$ соответственно и ориентированы одинаково с лабораторной системой S . Автора [5] интересовало вычисление характеристик системы отсчёта, сохраняющей в лабораторной системе свою ориентацию. Оказалось, что для близких моментов времени t и $t + \Delta t$ система i' не только движется со скоростью $\delta\mathbf{v}$ относительно i , но ещё и повернута на угол $\delta\varphi$ относительно i . Буст i'^3 равен [5, с. 403, формула (11.51)] (здесь и далее $c = 1$)

$$\delta\mathbf{v} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v^2(1-v^2)} (\mathbf{v}\Delta\mathbf{v})\mathbf{v}. \quad (10)$$

Поворот равен [5, с. 404, формула (11.53)]

$$\delta\varphi = \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v^2\sqrt{1-v^2}} \mathbf{v} \times \Delta\mathbf{v}. \quad (11)$$

Очевидно, поворот (11) отличен от нуля только в том случае, когда векторы $\mathbf{v}$ и $\Delta\mathbf{v}$ не параллельны друг другу. Поделим теперь (10) и (11) на Δt . Получим собственное ускорение

$$\mathbf{W} = \frac{\delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\dot{\mathbf{v}}}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v^2(1-v^2)} (\dot{\mathbf{v}}\mathbf{v})\mathbf{v} \quad (12)$$

и собственную угловую скорость

$$\Omega = \Omega_W = \frac{\delta\varphi}{\Delta t} = \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v^2\sqrt{1-v^2}} \mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (13)$$

²Здесь и далее под неинерциальной системой отсчёта s понимается движущаяся система, оси которой всё время параллельны осям лабораторной системы S . При этом оказывается, что такая система отсчёта обладает собственным вращением. Эта система отсчёта отличается от системы k , начало которой совпадает с s , но оси которой не вращаются. При этом они не остаются параллельными осям S .

³Бустом называется чистое преобразование Лоренца без поворотов осей.

Выпишем отдельно Ω_W , выраженную через величины, относящиеся только к лабораторной системе отсчёта:

$$\Omega_W = \frac{1 - \sqrt{1 - v^2}}{v^2(1 - v^2)} \mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{v}}{dT} = \frac{\gamma^3}{\gamma + 1} \mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{v}}{dT}, \quad (14)$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$. Вращение с частотой (13), (14) называют вращением Вигнера.

Кроме этого метода существует и другой стандартный метод исследования неинерциальных систем отсчёта — метод обобщённого преобразования Лоренца. В этой статье оно иногда будет именоваться специальным преобразованием Лоренца — Мёллера — Нэлсона (ЛМН)⁴. Это преобразование можно записать в 3+1-форме. Специальным преобразованием ЛМН из лабораторной инерциальной системы отсчёта $S:(T, \mathbf{R})$ в систему отсчёта $s:(t, \mathbf{r})$, оси которой движутся без поворота⁵ относительно S , является преобразование [8]

$$T = \frac{\mathbf{v}\mathbf{r}}{\sqrt{1 - v^2}} + \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad (15)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \frac{1 - \sqrt{1 - v^2}}{v^2\sqrt{1 - v^2}}(\mathbf{v}\mathbf{r})\mathbf{v} + \int_0^t \frac{\mathbf{v}dt}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (16)$$

Очевидно, что в случае, когда параметр преобразования $\mathbf{v}(t)$ является постоянным, обобщённое преобразование Лоренца переходит в специальное. В случае, когда направление вектора $\mathbf{v}(t)$ не изменяется, обобщённое преобразование Лоренца переходит в преобразование Мёллера [6, формулы (64), (66)]. Наиболее общее преобразование ЛМН из системы s в систему s' включает в себя вращение осей согласно замене

$$r^\alpha = a^{\beta\alpha} r'^\beta,$$

где обратная к матрице $a^{\beta\alpha}$ матрица $a^{\alpha\beta}$ является матрицей поворота $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$.

Сделаем некоторые выводы, диктуемые преобразованием (15), (16).

⁴История вопроса чрезвычайно богата и далеко не исчерпывается приведёнными ниже ссылками. Первооткрывателем этого преобразования для случая, когда система s движется инерциально, стал в 1899 г., как известно, Хендрик Лоренц. Датскому физiku Кристиану Мёллеру в 1943 г. удалось написать преобразование в прямолинейно движущуюся произвольным образом вдоль оси X неинерциальную систему отсчёта s [6, формулы (64), (66)]. В окончательной же форме для произвольно движущейся без собственного вращения жёсткой системы отсчёта s преобразование было им сформулировано в 1952 г. в монографии [7, § 4.14, § 8.15 в русском издании] (см. также [8; 9, § 2; 10; 11, § 2; 12, § 2.2]).

⁵Коснёмся понимания термина одинаковой ориентации осей лабораторной системы и движущейся системы отсчёта s . Этот вопрос является важным, поскольку в ряде работ ориентация движущейся системы сравнивается с ориентацией S . В том случае, если скорость s направлена вдоль одной из осей S , то в любом смысле оси системы s совпадают с осями S и никаких проблем не имеется. Но если направление скорости какое-либо другое, то прямоугольные оси координат системы отсчёта s в общем случае не прямоугольны с точки зрения наблюдателя в системе S (Мёллер). Поэтому слова «без поворота» надо понимать условно, в том смысле, что векторные пространства систем отсчёта s и S , связанные обобщённым преобразованием Лоренца (15), (16), считаются имеющими одинаковую «ориентацию». Фактическая же ориентация ортов систем S и s различна и зависит от скорости s . С этим вопросом тесно связан другой вопрос о том, можно ли отнести угол поворота осей координат движущейся системы отсчёта s к осям лабораторной системы. Мы полагаем, что такая операция является некорректной. Поэтому и вычисление частоты прецессии Томаса этим путём неправильно.

Продифференцировав эти равенства, можно получить соотношения (48), (49) (см. приложение 1). После подстановки их в квадрат интервала ds для лабораторной инерциальной системы отсчёта $ds^2 = dT^2 - d\mathbf{R}^2$ нетрудно показать, что математическая форма ds^2 преобразуется в

$$ds^2 = [(1 + \mathbf{W}\mathbf{r})^2 - (\boldsymbol{\Omega}_W \times \mathbf{r})^2] dt^2 - 2(\boldsymbol{\Omega}_W \times \mathbf{r}) d\mathbf{r} dt - d\mathbf{r}^2, \quad (17)$$

где $\mathbf{W}$ и $\boldsymbol{\Omega}_W$ определяются, соответственно, формулами (12) и (13). Квадрат интервала ds (17) является интервалом ускоренной и вращающейся системы отсчёта [9; 11; 13, секция 13.6, с. 404]⁶. Следовательно, система отсчёта s имеет собственное ускорение (12) и собственную угловую скорость (13).

Квадрату интервала, определяемому из (17), соответствует своё расстояние между соседними точками 3-пространства

$$dl^2 = d\mathbf{r}^2 + \frac{[(\boldsymbol{\Omega}_W \times \mathbf{r}) d\mathbf{r}]^2}{(1 + \mathbf{W}\mathbf{r})^2 - (\boldsymbol{\Omega}_W \times \mathbf{r})^2}.$$

Но в том случае, когда $\mathbf{r}$ мало, последним слагаемым по сравнению с первым можно пренебречь. В этом случае расстояние между соседними точками пространства с течением времени не изменяется. Поэтому система отсчёта s является только локально жёсткой системой.

Таким образом, метод сопутствующих инерциальных систем отсчёта и метод преобразования ЛМН приводят к одинаковым результатам в локальной области, прилегающей к началу отсчёта ($r \ll 1/W$, $r \ll 1/\Omega$), хотя и используют различные физические идеи. В удалённой области от начала отсчёта соответствия этих подходов нет из-за отсутствия жёсткости неинерциальной системы s .

Нетрудно также показать, что наиболее общее преобразование ЛМН из S в s' , которое является совокупностью преобразования (15), (16) вместе с преобразованием вращения осей s' вокруг s , обладает групповой структурой. Оно форминвариантно⁷ относительно произвольного буста (и поворота). Следовательно, для этого преобразования выполняется принцип относительности.

Сравнивая между собой эти два метода, заметим, что замена системы отсчёта s на совокупность мгновенно сопутствующих инерциальных систем отсчёта требует дополнительного обоснования, хотя бы из-за наличия сил инерции в s и отсутствия их в i , i' . Кроме того, таких систем отсчёта надо рассматривать как минимум две. С учётом ещё и лабораторной системы их будет уже три. В отличие от первого метода метод обобщённого преобразования Лоренца использует всего одну неинерциальную систему отсчёта. Эта статья основывается именно на таком подходе.

Запишем общее преобразование ЛМН в 4-мерном виде. Для этого введём тетраду 4-векторов

$$\begin{aligned} \Lambda^{0i} &= (\Lambda^{00}, \Lambda^{0\alpha}) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{v^\alpha}{\sqrt{1-v^2}} \right), \\ \Lambda^{\alpha i} &= (\Lambda^{\alpha 0}, \Lambda^{\alpha\beta}) = \left(\frac{v^\gamma a^{\alpha\gamma}}{\sqrt{1-v^2}}, a^{\alpha\beta} + \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v^2 \sqrt{1-v^2}} v^\beta v^\mu a^{\alpha\mu} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

где v^α есть 3-вектор скорости начала отсчёта неинерциальной системы, $a^{\alpha\beta}$ есть матрица поворота, а греческие индексы, как обычно, пробегают значения 1, 2, 3.

⁶Небольшое различие в собственной метрике [13] и [9], [11] связано с тем, что в [13] приведена метрика с точностью до первой степени по собственной координате.

⁷Форминвариантность такого преобразования означает сохранение его математической формы. Измениться при групповом преобразовании симметрии могут лишь параметры преобразования. Конкретный закон изменения параметров приведён в [14, формулы (22), (45)].

Пользуясь свойствами матрицы поворота, нетрудно проверить, что векторы тетрады удовлетворяют соотношениям ортонормированности

$$\Lambda^{0i}\Lambda_i^0 = 1, \quad \Lambda^{0i}\Lambda_i^\alpha = 0, \quad \Lambda^{\alpha i}\Lambda_i^\beta = -\delta^{\alpha\beta}. \quad (19)$$

Дифференцируя компоненты (18), можно получить, что

$$\frac{d\Lambda^{\alpha i}}{dx^0} = W'^\alpha \Lambda^{0i} + e^{\alpha\beta\gamma} \Omega'^\gamma \Lambda^{\beta i}. \quad (20)$$

С помощью этой тетрады общее преобразование принимает следующий вид:

$$X^i = \Lambda^{\alpha i} x^\alpha + \int \Lambda^{0i} dx^0.$$

Здесь x^α , x^0 являются коэффициентами в линейной комбинации векторов тетрады. Продифференцируем это равенство и поделим на ds . Пользуясь равенством (20), получим, что

$$U^i = \Lambda^{\alpha i} u^\alpha + \Lambda^{0i} u^0 + x^\alpha (W^\alpha \Lambda^{0i} + e^{\alpha\beta\gamma} \Omega^\gamma \Lambda^{\beta i}) u^0, \quad (21)$$

где $U^i = dX^i/ds$, $u^\alpha = dx^\alpha/ds$, $u^0 = dx^0/ds$. Данное уравнение определяет релятивистскую кинематику деформируемого стержня. При этом величины (u^0, u^α) в собственной системе связаны с 4-скоростью U^i точек стержня в лабораторной системе и векторами тетрады Λ^{0i} , $\Lambda^{\alpha i}$. Найдём эту связь, умножив (21) на Λ_i^μ и на Λ_i^0 . Учитывая (19), получим

$$U^i \Lambda_i^\mu = -u^\mu - x^\alpha e^{\alpha\mu\gamma} \Omega^\gamma u^0, \quad U^i \Lambda_i^0 = u^0 (1 + x^\alpha W^\alpha).$$

Отсюда

$$u^0 = \frac{U^i \Lambda_i^0}{1 + x^\alpha W^\alpha}, \quad u^\mu = -U^i \Lambda_i^\mu - x^\alpha e^{\alpha\mu\gamma} \Omega^\gamma \frac{U^i \Lambda_i^0}{1 + x^\alpha W^\alpha}. \quad (22)$$

Можно показать, что собственные характеристики системы отсчёта в этой формуле связаны с тетрадой равенствами

$$W'^\gamma = \Lambda_i^0 \frac{d\Lambda^{\gamma i}}{dx^0}, \quad \Omega'^\gamma = -\frac{1}{2} e^{\alpha\mu\gamma} \Lambda_i^\mu \frac{d\Lambda^{\alpha i}}{dx^0}.$$

2. Результаты

2.1. Преобразование скорости из лабораторной системы в сопутствующую невращающуюся систему и наоборот

Рассмотрим движение стержня относительно ускоренной системы отсчёта k , которая сопутствует s и не имеет собственного вращения. При этом предполагается, что оси k в данный момент совпадают с осями s . Оказывается, что в этом случае соответствующие формулы немного упрощаются. Скорость $\mathbf{U}$ конца стержня в лабораторной системе отсчёта S оказывается связана со скоростью $\mathbf{u}$ в системе k уравнениями

$$\mathbf{U} = \frac{(1 + \mathbf{W}\mathbf{r}) \mathbf{v} + \sqrt{1 - v^2} \mathbf{u} + \frac{1 - \sqrt{1 - v^2}}{v^2} (\mathbf{v}\mathbf{u}) \mathbf{v}}{1 + \mathbf{W}\mathbf{r} + \mathbf{v}\mathbf{u}}, \quad (23)$$

$$\mathbf{u} = \frac{(1 + \mathbf{W}\mathbf{r}) \left[\sqrt{1 - v^2} \mathbf{U} - \mathbf{v} + \frac{1 - \sqrt{1 - v^2}}{v^2} (\mathbf{v}\mathbf{U}) \mathbf{v} \right]}{1 - \mathbf{v}\mathbf{U}}. \quad (24)$$

Расчёт приведён в приложении 1.

Заметим, что если подставить в (23) $\mathbf{u} = 0$, то получим, что $\mathbf{U} = \mathbf{v}$.

2.2. Параметр $\mathbf{v}$ как функция собственной координаты

Покажем, что параметр $\mathbf{v}$ является функцией скорости начала отсчёта $\mathbf{V}$ системы k , его лабораторного ускорения $\mathbf{A}$ и координаты $\mathbf{r}$.

Легко заметить, что параметр преобразования ЛМН — функция $\mathbf{v}$ зависит не от времени T лабораторной системы, а от времени t собственной системы. Это обстоятельство является характерным свойством обобщённого преобразования Лоренца. Вместо времени t введём новую переменную согласно условию

$$\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1-v^2}} = \theta. \quad (25)$$

Зная функцию $\mathbf{v}(t)$, мы тем самым знаем и функцию $\mathbf{v}$ от θ . Согласно же уравнению (15) $\theta = T - \Delta T$, где

$$\Delta T = \frac{\mathbf{v}\mathbf{r}}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Разложим $\mathbf{v}(\theta)$ по степеням ΔT согласно двум последним равенствам. Ограничиваясь первой степенью, получим

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} - \frac{(\mathbf{V}\mathbf{r})\mathbf{A}}{\sqrt{1-V^2}}. \quad (26)$$

Другое представление формулы (26) через собственное ускорение $\mathbf{W}$ есть

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} - \sqrt{1-V^2}(\mathbf{V}\mathbf{r})\mathbf{W} + \frac{\sqrt{1-V^2}(1-\sqrt{1-V^2})}{V^2}(\mathbf{V}\mathbf{r})(\mathbf{V}\mathbf{W})\mathbf{V}. \quad (27)$$

2.3. Преобразование лабораторной аффинной скорости в сопутствующую невращающуюся систему отсчёта

Итак, пусть в лабораторной системе отсчёта конец стержня движется согласно (2). Интересно движение этой точки относительно системы отсчёта k . Учитывая равенства (1) и (24), можно найти, что

$$\begin{aligned} \omega^{\alpha\beta} = & \frac{\Omega^{\alpha\beta}}{\sqrt{1-V^2}} + \frac{1-\sqrt{1-V^2}}{V^2(1-V^2)} \Omega^{\gamma\beta} V^\alpha V^\gamma - \frac{(1-\sqrt{1-V^2})^2}{V^4(1-V^2)} (\Omega^{\gamma\mu} V^\gamma V^\mu) V^\alpha V^\beta - \\ & - \frac{1-\sqrt{1-V^2}}{V^2\sqrt{1-V^2}} \Omega^{\alpha\gamma} V^\gamma V^\beta + \frac{1-\sqrt{1-V^2}}{V^2\sqrt{1-V^2}^3} (\mathbf{A}\mathbf{V}) V^\alpha V^\beta + \frac{V^\beta A^\alpha}{1-V^2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Симметричная и антисимметричная части тензора $\omega^{\alpha\beta}$ имеют вид

$$\begin{aligned} s^{\alpha\beta} = & \frac{S^{\alpha\beta}}{\sqrt{1-V^2}} + \frac{(1-\sqrt{1-V^2})^2}{2V^2(1-V^2)} V^\gamma (S^{\alpha\gamma} V^\beta + S^{\beta\gamma} V^\alpha) - \\ & - \frac{(1-\sqrt{1-V^2})^2}{V^4(1-V^2)} (S^{\gamma\mu} V^\gamma V^\mu) V^\alpha V^\beta + \frac{(A^\alpha - e^{\alpha\lambda\gamma} \Omega^\lambda V^\gamma) V^\beta + V^\alpha (A^\beta - e^{\beta\lambda\gamma} \Omega^\lambda V^\gamma)}{2(1-V^2)} + \\ & + \frac{1-\sqrt{1-V^2}}{V^2\sqrt{1-V^2}^3} (\mathbf{V}\mathbf{A}) V^\alpha V^\beta, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\omega^\alpha = \frac{2-V^2}{2(1-V^2)} \Omega^\alpha - \frac{(1-\sqrt{1-V^2})^2}{2V^2(1-V^2)} (\Omega\mathbf{V}) V^\alpha + \frac{e^{\alpha\mu\nu} V^\gamma V^\nu S^{\gamma\mu}}{2(1-V^2)} + \frac{e^{\alpha\mu\nu} V^\mu A^\nu}{2(1-V^2)}. \quad (30)$$

Здесь V^α — скорость начала координат системы k , $\Omega^{\alpha\beta}$ — некоторая матрица аффинной скорости в лабораторной системе, Ω и $S^{\alpha\beta}$ — соответственно угловая скорость вращения главных осей и тензор скорости деформации в лабораторной системе, $\omega^{\alpha\beta}$ — некоторая матрица аффинной скорости в невращающейся системе k , ω и $s^{\alpha\beta}$ — соответственно угловая скорость вращения главных осей и тензор скорости деформации в системе k . Данные вычисления выполнены в приложении 3.

Рассмотрим сейчас важный частный случай преобразования (28). Пусть локальная система отсчёта движется так, что вектор расстояния между её любыми двумя точками, измеренный в S , во время движения постоянен. Это требование означает, что аффинная скорость для этого движения равна нулю ($\Omega^{\alpha\beta} = 0$). Однако в сопутствующей системе аффинная скорость будет отлична от нуля. Если $\Omega^{\alpha\beta} = 0$, то из равенства (28) следует, что

$$\omega^{\alpha\beta} = \frac{1 - \sqrt{1 - V^2}}{V^2 \sqrt{1 - V^2}^3} (\mathbf{V}\mathbf{A}) V^\alpha V^\beta + \frac{V^\beta A^\alpha}{1 - V^2}$$

и, следовательно,

$$\omega = \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{A}}{2(1 - V^2)}, \quad (31)$$

$$s^{\alpha\beta} = \frac{V^\beta A^\alpha + V^\alpha A^\beta}{2(1 - V^2)} + \frac{1 - \sqrt{1 - V^2}}{V^2 \sqrt{1 - V^2}^3} (\mathbf{V}\mathbf{A}) V^\alpha V^\beta.$$

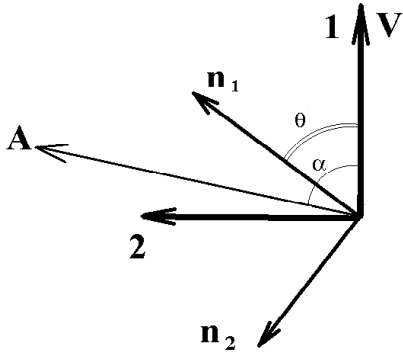


Рис. 1. Система координат $(\mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2)$, в которой тензор $s^{\alpha\beta}$ диагональный.

При этом вектор $\mathbf{n}^3$ направлен на читателя

Найдём главные оси и главные значения $s^{\alpha\beta}$. Выберем первоначальную систему координат так, чтобы ось 1 проходила в направлении вектора скорости $\mathbf{V}$. При этом ось 2 находится в плоскости, в которой лежат векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{V}$. Пусть угол между этими векторами α (рис. 1). В этом случае компоненты тензора $s^{\alpha\beta}$ равны

$$s^{11} = \frac{VA \cos \alpha}{\sqrt{1 - V^2}^3}, \quad s^{12} = s^{21} = \frac{VA \sin \alpha}{2(1 - V^2)}.$$

Остальные компоненты $s^{\alpha\beta}$ равны нулю. Решив уравнение (8), получим главные значения этого тензора

$$s^1 = \frac{VA}{2\sqrt{1 - V^2}^3} \left(\sqrt{1 - V^2 \sin^2 \alpha} + \cos \alpha \right), \quad (32)$$

$$s^2 = -\frac{VA}{2\sqrt{1 - V^2}^3} \left(\sqrt{1 - V^2 \sin^2 \alpha} - \cos \alpha \right). \quad (33)$$

Первое главное направление, которое соответствует значению s^1 , равно

$$\mathbf{n}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{\sqrt{1 - V^2 \sin^2 \alpha} + \cos \alpha}}{\sqrt[4]{1 - V^2 \sin^2 \alpha}}, \frac{\sqrt{\sqrt{1 - V^2 \sin^2 \alpha} - \cos \alpha}}{\sqrt[4]{1 - V^2 \sin^2 \alpha}} \right). \quad (34)$$

Соответственно второе направление есть

$$\mathbf{n}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{\sqrt{\sqrt{1 - V^2 \sin^2 \alpha} - \cos \alpha}}{\sqrt[4]{1 - V^2 \sin^2 \alpha}}, \frac{\sqrt{\sqrt{1 - V^2 \sin^2 \alpha} + \cos \alpha}}{\sqrt[4]{1 - V^2 \sin^2 \alpha}} \right).$$

Найдём теперь ориентацию вектора $\mathbf{n}^1$ относительно $\mathbf{V}$. Вектор $\mathbf{n}^1$ можно представить в виде

$$\mathbf{n}^1 = (\cos \theta, \sin \theta), \quad (35)$$

где θ — угол поворота $\mathbf{n}^1$. Сравнив (34) с (35), получим, что

$$\tan^2 \theta = \frac{\sqrt{1 - V^2 \sin^2 \alpha} - \cos \alpha}{\sqrt{1 - V^2 \sin^2 \alpha} + \cos \alpha}.$$

2.4. Преобразование собственной аффинной скорости в лабораторную систему отсчёта

Обратное преобразование к (28) имеет вид

$$\begin{aligned} \Omega^{\alpha\beta} = & \sqrt{1 - V^2} \omega^{\alpha\beta} - \frac{\sqrt{1 - V^2}(1 - \sqrt{1 - V^2})}{V^2} \omega^{\gamma\beta} V^\gamma V^\alpha - \\ & - \frac{(1 - \sqrt{1 - V^2})^2}{V^4} (\omega^{\gamma\mu} V^\gamma V^\mu) V^\alpha V^\beta + \frac{1 - \sqrt{1 - V^2}}{V^2} \omega^{\alpha\gamma} V^\beta V^\gamma - \frac{V^\beta A^\alpha}{1 - V^2}. \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь V^α и A^α — соответственно скорость и ускорение начала координат системы k , $\Omega^{\alpha\beta}$ и $\omega^{\alpha\beta}$ — некоторая матрица аффинной скорости в лабораторной системе и в невращающейся системе k соответственно. Вычисление этого линейного преобразования приведено в приложении 4. Укажем также преобразование для $S^{\alpha\beta}$ и Ω^α :

$$\begin{aligned} S^{\alpha\beta} = & \sqrt{1 - V^2} s^{\alpha\beta} - \frac{(1 - \sqrt{1 - V^2})^2}{V^4} (s^{\gamma\mu} V^\gamma V^\mu) V^\alpha V^\beta + \\ & + \frac{(1 - \sqrt{1 - V^2})^2}{2V^2} (s^{\alpha\gamma} V^\beta + s^{\beta\gamma} V^\alpha) V^\gamma - \frac{1}{2} (e^{\gamma\lambda\beta} V^\alpha + e^{\gamma\lambda\alpha} V^\beta) \omega^\lambda V^\gamma - \\ & - \frac{V^\beta A^\alpha + V^\alpha A^\beta}{2(1 - V^2)}, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\Omega^\alpha = \frac{2 - V^2}{2} \omega^\alpha - \frac{(1 - \sqrt{1 - V^2})^2}{2V^2} (\omega^\gamma V^\gamma) V^\alpha - \frac{1}{2} e^{\alpha\mu\nu} s^{\gamma\mu} V^\nu V^\gamma - \frac{e^{\alpha\mu\nu} V^\mu A^\nu}{2(1 - V^2)}. \quad (38)$$

Специально рассмотрим ещё важный случай жёсткой невращающейся локальной системы отсчёта k ($\omega^{\alpha\beta} = 0$). Из (36)–(38) видно, что

$$\Omega^{\alpha\beta} = -\frac{V^\beta A^\alpha}{1 - V^2}. \quad (39)$$

$$S^{\alpha\beta} = -\frac{V^\beta A^\alpha + V^\alpha A^\beta}{2(1 - V^2)},$$

$$\Omega = -\frac{\mathbf{V} \times \mathbf{A}}{2(1 - V^2)}. \quad (40)$$

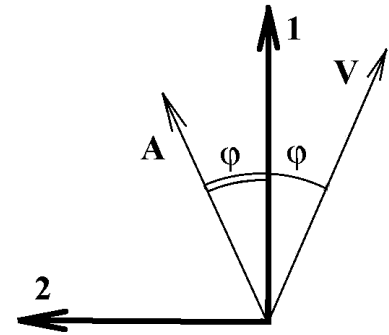


Рис. 2. Система координат $(\mathbf{1}, \mathbf{2})$, в которой тензор $S^{\alpha\beta}$ диагональный

Выберем систему координат так, чтобы ось 1 проходила по биссектрисе между векторами скорости $\mathbf{V}$ и ускорения $\mathbf{A}$ (рис. 2).

В этом случае тензор $S^{\alpha\beta}$ станет диагональным. Если угол между векторами $\mathbf{V}$ и $\mathbf{A}$ равен 2φ , то главные значения этого тензора равны

$$S^1 = S^{11} = -\frac{VA \cos^2 \varphi}{2(1 - V^2)}, \quad (41)$$

$$S^2 = S^{22} = \frac{VA \sin^2 \varphi}{2(1 - V^2)}, \quad (42)$$

$$S^3 = S^{33} = 0.$$

Для системы отсчёта, которая равномерно движется по окружности с частотой ϖ , формула (40) перейдёт в

$$\Omega = \Omega_n = -\frac{V^2}{2(1 - V^2)} \varpi = -\frac{\gamma^2 - 1}{2} \varpi.$$

Интересно сравнить данное значение частоты со средним значением частоты прецессии Томаса, которое в случае равномерного вращения равно [15]

$$\Omega_T = -\frac{1 - \sqrt{1 - V^2}}{\sqrt{1 - V^2}} \varpi = -(\gamma - 1) \varpi.$$

Следовательно,

$$\Omega_n = \frac{\gamma + 1}{2} \Omega_T > \Omega_T.$$

2.5. Ускоренно вращающийся диск

Рассмотрим жёстко вращающееся тело, все точки которого вращаются вокруг начала координат лабораторной инерциальной системы отсчёта со скоростью $\mathbf{V} = \Omega \times \mathbf{R}$. Дифференцируя это равенство, получим, что ускорение $\mathbf{A}$ равно

$$\mathbf{A} = \Omega \times \mathbf{V} + \dot{\Omega} \times \mathbf{R}. \quad (43)$$

Выделим на этом теле достаточно малую область вблизи точки A с координатой $\mathbf{R}$. Жёсткость вращения относительно лабораторной системы отсчёта означает отсутствие скорости центрального растяжения области A ($S^{\alpha\beta} = 0$). Применим ранее полученные формулы к ближайшей окрестности A .

Рассмотрим сначала локальную деформацию. Скорость растяжения вдоль главной оси определяется тензором $s^{\alpha\beta}$ из формулы (29). В этой формуле первые три члена из-за жёсткости движения исчезают. Подставляя сюда (43), получим

$$s^{\alpha\beta} = \frac{e^{\alpha\delta\gamma} \dot{\Omega}^\delta R^\gamma V^\beta + V^\alpha e^{\beta\delta\gamma} \dot{\Omega}^\delta R^\gamma}{2(1 - V^2)} + \frac{1 - \sqrt{1 - V^2}}{V^2 \sqrt{1 - V^2}^3} \left(\mathbf{V}(\dot{\Omega} \times \mathbf{R}) \right) V^\alpha V^\beta. \quad (44)$$

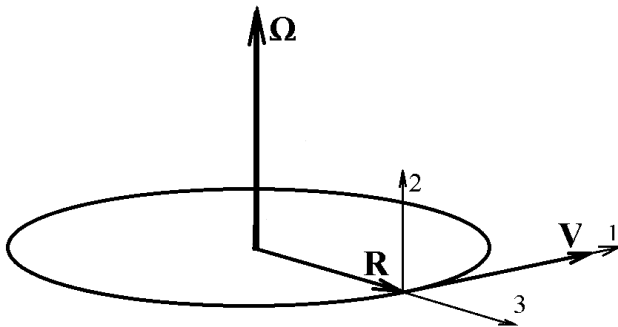


Рис. 3. Локальная система координат на вращающемся диске

Таким образом, если тело относительно осевого наблюдателя вращается жёстко и равномерно с постоянной угловой скоростью ($\dot{\Omega} = 0$), то тензор скорости деформации $s^{\alpha\beta}$ в точке A равен нулю. Это означает, что ближайшие к наблюдателю точки тела вращаются без центрального растяжения, т.е. тоже как твёрдое тело. В том же случае, когда тело вращается с угловым ускорением,

скорость деформации, вообще говоря, ненулевая. Ориентируем оси системы координат так, чтобы ось 2 была в направлении вектора угловой скорости Ω , вектор $\mathbf{R}$ был направлением оси 3, при этом вектор скорости $\mathbf{V} = \Omega \times \mathbf{R}$ будет направлением

оси 1 (рис. 3). Оси 1 и 3 в лабораторной системе отсчёта изменяют своё направление в пространстве. Перейдём в систему координат, которая связана с этими направлениями. Тогда тензор $s^{\alpha\beta}$ становится диагональным, и единственной ненулевой компонентой будет его главное значение s^1 , равное согласно (44)

$$s^1 = s^{11} = \frac{V\dot{\Omega}R}{\sqrt{1-V^2}^3} = \frac{R^2\Omega\dot{\Omega}}{\sqrt{1-R^2\Omega^2}^3}.$$

Проинтегрируем это равенство за всё время вращения из начального состояния покоя до угловой скорости Ω . Получим, что логарифмический коэффициент растяжения вдоль оси 1 есть

$$\int_0^t s^1 dt = \int_0^T \frac{R^2\Omega\dot{\Omega}}{\sqrt{1-R^2\Omega^2}^3} \cdot \sqrt{1-R^2\Omega^2} dT = -\frac{1}{2} \ln(1-R^2\Omega^2).$$

Учитывая это равенство, вычислим растяжение тела в точке А согласно формуле (9). Оно равно

$$r^1 = \frac{r_0^1}{\sqrt{1-R^2\Omega^2}}, \quad r^2 = r_0^2, \quad r^3 = r_0^3. \quad (45)$$

Этот расчёт прекрасно согласуется с известным фактом, что для вращающегося диска в процессе его ускоренного вращения его материал растягивается в направлении оси 1 как раз в $1/\sqrt{1-R^2\Omega^2}$ раз.

Теперь рассмотрим вращение. Поскольку вращение жёсткое, то предпоследний член в (30) исчезнет. В результате получим в векторном виде, что относительно системы отсчёта k

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{2-V^2}{2(1-V^2)}\boldsymbol{\Omega} - \frac{(1-\sqrt{1-V^2})^2}{2V^2(1-V^2)}(\boldsymbol{\Omega}\mathbf{V})\mathbf{V} + \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{A}}{2(1-V^2)}.$$

Подставляя сюда (43), раскрывая скобки, приводя подобные члены и учитывая, что $\boldsymbol{\Omega}\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{R} = 0$, получим

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{\Omega}}{1-V^2} - \frac{\mathbf{R}(\dot{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{V})}{2(1-V^2)}. \quad (46)$$

Эта формула даёт мгновенную угловую скорость вращения главных осей локальной области вращающегося тела. Если тело раскручивается вдоль оси вращения, то $\dot{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{V} = 0$, и формула (46) радикально упрощается

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{\Omega}}{1-V^2}. \quad (47)$$

Данное значение уже известно из различных источников [9; 16].

3. Обсуждение

Прокомментируем теперь полученные формулы.

Прежде всего выясним место системы отсчёта, определяемой общим преобразованием ЛМН, среди систем отсчёта общей теории относительности. В общем случае любая система отсчёта ОТО является локальной (определена в малой области пространства-времени) и характеризуется тензорами ускорения, скорости вращения и деформации (смотри фундаментальную монографию Ю. С. Владимирова

[17]). В этом подходе наиболее общая система отсчёта трактуется как некая деформируемая сплошная среда. Специфика подхода, представленного в данной статье, в отличие от систем отсчёта общей теории относительности (ОТО), заключается в том, что неинерциальная система отсчёта s' , относительно которой рассматривается движение среды, является жёсткой в ближайшей окрестности начала отсчёта. Другими словами, начало движущейся системы отсчёта движется заданным образом $\Lambda^{0i}, \Lambda^{\alpha i}$. Именно относительно такой жёсткой системы отсчёта рассматривается локальное движение деформируемой среды. Если начало неинерциальной жёсткой системы отсчёта s' связано с какой-либо точкой этой среды, то локальное движение среды относительно s' будет описываться только тензором угловой скорости и тензором скорости деформации. Таким образом, результаты, полученные в этой работе, являются частным случаем более общего монадного метода ОТО, в котором задано временноподобное поле 4-скоростей U^i точек деформируемой среды. При этом общее поле U^i мировых линий описывается в изложенном подходе тетрадой $\Lambda^{0i}, \Lambda^{\alpha i}$ начала движущейся системы отсчёта s' и «мировыми линиями» $u^i = (u^0, u^\mu)$ точек этой среды относительно неинерциальной системы s' согласно (21). Если же требуется знать относительное движение точек деформируемой среды, то его можно установить, зная поле U^i и тетраду начала системы отсчёта $\Lambda^{0i}, \Lambda^{\alpha i}$, согласно (22).

Далее, отметим характерные свойства специального преобразования ЛМН. Напомним, что это преобразование описывает переход из лабораторной системы отсчёта в систему s , которая испытывает собственное вращение Вигнера. Однако параметр такого преобразования $\mathbf{v}$ не является скоростью системы s , как можно было бы ожидать. Данный параметр является скоростью системы k , которая в данный момент времени совпадает с s , но не вращается. Это обстоятельство следует из приведённой в разделе 1 формулы сложения скоростей (23). Она связывает скорость частицы в системах отсчёта S и k . Действительно, из формулы (23) следует, что точки системы k покоятся в ней ($\mathbf{u} = 0$) только в том случае, если они движутся относительно S со скоростью $\mathbf{U} = \mathbf{v}$.

Уравнения (26), (27) означают, что с точки зрения наблюдателя в S система координат k движется со скоростью, не равной скорости начальной точки системы отсчёта, и, следовательно, неоднородна. Данное обстоятельство абсолютно естественно и ожидаемо. Действительно, пусть ось прямоугольной системы координат ускоренной системы отсчёта представляет собой жёсткий стержень. Тогда он в процессе своего ускорения с увеличением скорости непременно кинематически сокращается относительно лабораторной системы. Это и означает, что его точки в данный момент времени движутся неоднородно. Из формулы (26) видно, что при разгоне системы отсчёта, начало которой находится в заднем конце жёсткого (в собственной системе отсчёта) стержня, его передний конец движется медленнее, чем задний, на величину $\mathbf{A}(\mathbf{Vr})/\sqrt{1-V^2}$. Напротив, при торможении передний конец движется быстрее, чем задний, на ту же самую величину. Если в классической механике жёсткость системы координат предполагает, что скорость движения каждой её точки меняется со временем одинаково, независимо от её положения, то в релятивистской теории это условие не выполняется.

На этот же факт можно взглянуть иначе. События, происходящие в точке с координатой $\mathbf{r}$ и в начале отсчёта, одновременные в s , будут неодновременными в лабораторной системе. Промежуток времени между этими событиями равен расинхронизации часов при замене системы отсчёта из s в лабораторную систему S . Таким образом, неоднородность движения точек системы координат k являет-

ся следствием относительности понятия одновременности в S . Другими словами, фактически происходит запаздывание набора скорости передней точки стержня по сравнению с началом на промежуток времени $\Delta T = \mathbf{v}\mathbf{r}/\sqrt{1-v^2}$.

Представление о неоднородности движения точек ускоренного жёсткого стержня обычно наталкивается на возражение, что эта неоднородность скоростей несовместима с жёсткостью стержня. Другими словами, если перейти в мгновенно сопутствующую инерциальную систему отсчёта, двигающуюся со скоростью задней точки, то, казалось бы, скорость передней точки стержня в этой системе отсчёта будет отлична от нуля. Создаётся впечатление, что в том случае, если допустить неоднородность скоростей, жёсткая система координат ускоренной системы отсчёта будет отсутствовать. На самом деле это возражение является предрассудком, основанным на распространении закона вычитания скоростей, справедливого для инерциальных систем отсчёта, на неинерциальные системы.

Полученное преобразование аффинной скорости оказалось не простым. Интересно отметить, что уравнение (36) состоит из пяти слагаемых, четыре из которых существуют даже при равномерном движении k , а последнее является следствием влияния ускорения начала отсчёта. Напротив, уравнение (28) состоит из шести слагаемых, четыре из которых существуют даже при равномерном движении k , а два последних являются следствием влияния ускорения k . Сложность этого преобразования может заставить сомневаться в его справедливости. Тем не менее это обстоятельство полностью удовлетворяет требованиям теории относительности. На самом деле математическая громоздкость преобразования является следствием разнообразия возможного движения точек нежёсткой системы отсчёта в лабораторной системе. Из преобразования следует, что, как правило, точка системы отсчёта движется, не только вращаясь вокруг ведущего центра с некоторой угловой скоростью, но и имеет составляющую скорости, соответствующую растяжению.

Рассмотрим важные частные случаи полученного преобразования аффинной скорости.

Первый из этих частных случаев был рассмотрен в разделе 3 на примере преобразования (28). Это однородное движение точек, которое впервые рассматривали Деван и Беран [1]. Важность этого случая определяется тем обстоятельством, что часто локальная система отсчёта движется так, чтобы вектор расстояния между её любыми двумя точками, измеренный в S , был во время движения постоянным. Простым примером такого движения является движение частиц, составляющих систему отсчёта в однородном силовом поле. Это означает, что в преобразовании (28) лабораторная аффинная скорость должна быть приравнена нулю. Оказалось, что главные оси системы отсчёта k увеличиваются с коэффициентами относительного удлинения (32), (33). При этом они вращаются в k с частотой вращения (31).

Другой важный случай заключается в сложном движении точек жёсткой системы отсчёта k в S . Этой известной задаче посвящено множество работ [18]. Обычно считается, что точки k относительно S участвуют только во вращении. Данное явление получило название прецессии Томаса. На самом деле вследствие сокращения Лоренца движение точек k является сложным. Единственное корректное решение задачи об этой «прецессии» было представлено в статье [2, § 3 и приложение D]. Автор [2] получил дифференциальное уравнение для длины отрезка невращающейся системы отсчёта, измеренной в лабораторной системе отсчёта. Оно имеет вид (3) (в наших обозначениях), где аффинная скорость равна (39). После этого Степанов решил соответствующее дифференциальное уравнение и нашёл движение стержня в лабораторной системе отсчёта S . Движение вектора $\mathbf{L}$, описываемое этим урав-

нением, получилось сложным, и угловая скорость вращения стержня системы k является переменной величиной. Любопытно, что средняя частота вычисленной Степановым прецессии Томаса стержня оказалась совпадающей с обычно принятой частотой томасовской прецессии. Тем самым он впервые правильно поставил и решил задачу о прецессии Томаса жёсткого стержня.

Аффинная скорость (39) точек жёсткой системы отсчёта k в S является результатом двух движений. Первое движение есть растяжение в S главных осей системы координат k с коэффициентами относительного удлинения (41), (42). Второе — является вращением главных осей k с частотой (40). Она была также вычислена из закона сохранения момента в [19, формула (17)]. На первый взгляд, частота вращения главных осей системы координат k должна совпадать с частотой прецессии Томаса. Однако это не так. Частота вращения главных осей при равномерном вращении в системе S в $(\gamma + 1)/2$ раз превышает частоту прецессии Томаса. Это обстоятельство связано с тем, что главное направление системы k не является направлением какого-то навсегда заданного стержня системы k , а задаётся внешними по отношению к k величинами: скоростью и ускорением. Стержни же системы k разных направлений вращаются в лабораторной системе S неодинаково. Можно предположить, что пренебрежение сложным законом преобразования аффинной скорости, видимо, привело к разным формулам для частоты прецессии Томаса.

Предел применимости полученных формул в основном сводится к вопросу о степени справедливости обобщённого преобразования Лоренца. Данное преобразование является почти безусловно справедливым. Ограничение заключается только в том, чтобы собственное ускорение начала отсчёта не испытывало скачков. Точнее, параметр скорости $\mathbf{v}$ в (15), (16) должен быть дифференцируемым.

В четырёхмерных обозначениях полученные формулы представить затруднительно из-за нековариантности сокращения Лоренца и замедления времени. Смысл полученных формул, видимо, ограничен трёхмерным видом. Достоверность полученных формул подтверждается принятым в настоящей статье стандартным методом обобщённого преобразования Лоренца и совпадением некоторых результатов с результатами других авторов.

4. Итоги

1. При рассмотрении неинерциального движения вместо метода мгновенно сопутствующих инерциальных систем отсчёта целесообразнее использовать метод обобщённого преобразования Лоренца.

2. Вместо угловой скорости вращения тела Ω в S имеет смысл только тензор аффинной скорости $\Omega^{\alpha\beta}$ общего неантисимметричного вида. Поэтому не существует прецессии Томаса, понимаемой как чистое вращение относительно лабораторной системы отсчёта S , у тела, собственные размеры которого сохраняются. Под прецессией Томаса мы понимаем вращение главных осей ускоренно движущегося тела.

3. Полученное преобразование аффинной скорости является результатом совместного действия основных эффектов СТО и является нековариантным, аналогично другим эффектам.

4. Собственная локальная угловая скорость некоторой области произвольно вращающейся системы отсчёта равна (46).

5. Совпадение расчёта локального растяжения раскручивающейся системы отсчёта (45) с уже известным значением косвенно свидетельствует об истинности указанного преобразования аффинной скорости (36), (28). Об этом также говорит сов-

падение вычисленной локальной собственной угловой скорости участка равномерно вращающегося твёрдого тела с известным значением (47).

Заключение

Новизна статьи в основном заключается в трёх аспектах.

Во-первых, в данной работе было найдено преобразование мгновенной скорости (23), (24), связывающее произвольно движущуюся и невращающуюся неинерциальную систему отсчёта k и лабораторную инерциальную систему отсчёта S . Был объяснён также физический смысл параметра $\mathbf{v}(t)$ частного преобразования ЛМН (15), (16). Он оказался простым. Со скоростью $\mathbf{v}(t)$ относительно лабораторной системы отсчёта S движутся точки невращающейся системы отсчёта k , которая сопутствует системе s . Движение k является неоднородным, согласно формуле (26). Точки же системы s движутся относительно S со скоростью (54).

Кроме того, найдено преобразование аффинной скорости из системы k в систему S и наоборот. Полученные формулы оказались довольно громоздкими, но на практике интересна не сама аффинная скорость малой области, а угловая скорость вращения её главных осей и скорость её растяжения по главным осям. Для этих величин также были найдены законы преобразований (29), (30). Рассмотрены также важные частные случаи этого преобразования.

Наконец, полученные уравнения были применены к ускоренно вращающемуся диску и была вычислена его локальная угловая скорость ω . При этом оказалось, что если первоначально вращение диска относительно наблюдателя в лабораторной системе являлось жёстким, то при положении наблюдателя на периферии диска материал, из которого он изготовлен, движется, вообще говоря, нежёстко (44). Другими словами, если расстояние между двумя точками относительно наблюдателя, находящегося в центре неравномерно вращающегося тела, сохраняется, то при сдвиге наблюдателя это расстояние будет изменяться даже в его ближней окрестности. Оказалось, что значение этой скорости ω зависит ещё и от углового ускорения системы отсчёта. Угловая скорость вращения точек ближайшей окрестности около наблюдателя для случая неравномерного вращения будет равна (46). Для твёрдого тела собственное растяжение периферии (45) оказалось совпадающим с известным значением.

Знание зависимости аффинной скорости как функции времени для кинематики имеет практическую ценность. Достаточно сказать, что знание $\Omega^{\alpha\beta}$ в принципе позволяет решить дифференциальное уравнение вида (1), подобно тому как решил его Степанов, и тем самым найти движение деформируемого стержня в лабораторной системе отсчёта. Поэтому известная зависимость аффинной скорости от времени для кинематики играет роль силы для второго закона Ньютона. Соответственно этому найденное преобразование аффинной скорости в кинематике занимает место формулы преобразования сил для динамики.

Существует и другая, далеко идущая аналогия: между кинематическими характеристиками и напряжённостями поля. Действительно, ускорение группы частиц в некотором роде аналогично напряжённости электрического поля, а угловая скорость Ω — напряжённости магнитного поля. С другой стороны, 3 компоненты вектора угловой скорости Ω и 6 компонент симметричного тензора $S^{\alpha\beta}$ вместе образуют единый тензор аффинной скорости $\Omega^{\alpha\beta}$. Возникает вопрос: не существует ли также новое, третье поле (кроме электрического и магнитного) тензорного вида квазимагнитной природы, которое в отношении своего действия на группу пробных зарядов приводит лишь к изменению размера группы (увеличению или

уменьшению) аналогично $S^{\alpha\beta}$? Это даёт основание считать известный закон преобразования электромагнитных полей при смене системы отсчёта, возможно, не вполне корректным. Мы полагаем, что данный кинематический подход позволит доказать существование полевого аналога тензора скорости деформации в теории электромагнитного поля. В выводе будущего правильного релятивистского закона преобразования напряжённостей поля полученное преобразование аффинной скорости, вероятно, будет играть определяющую роль.

Приложение 1. Скорость в собственной и лабораторной системах отсчёта

Продифференцировав соотношения (15), (16), получим

$$dT = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{\dot{\mathbf{v}}\mathbf{r}}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{(\dot{\mathbf{v}}\mathbf{v})(\mathbf{v}\mathbf{r})}{\sqrt{1-v^2}^3} \right\} dt + \frac{\mathbf{v}d\mathbf{r}}{\sqrt{1-v^2}}, \quad (48)$$

$$d\mathbf{R} = d\mathbf{r} + \frac{1 - \sqrt{1-v^2}}{v^2\sqrt{1-v^2}}(\mathbf{v}d\mathbf{r})\mathbf{v} + \left\{ \frac{2\sqrt{1-v^2}^3 + 3v^2 - 2}{v^4\sqrt{1-v^2}^3}(\mathbf{v}\mathbf{r})(\dot{\mathbf{v}}\mathbf{v})\mathbf{v} + \frac{1 - \sqrt{1-v^2}}{v^2\sqrt{1-v^2}}[(\mathbf{v}\mathbf{r})\dot{\mathbf{v}} + (\dot{\mathbf{v}}\mathbf{r})\mathbf{v}] + \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}} \right\} dt. \quad (49)$$

Из (12) следует, что

$$\dot{\mathbf{v}} = \sqrt{1-v^2} \mathbf{W} - \frac{\sqrt{1-v^2}(1 - \sqrt{1-v^2})}{v^2}(\mathbf{v}\mathbf{W})\mathbf{v}. \quad (50)$$

Подставляя это соотношение в (13), получим

$$\Omega_W = \frac{1 - \sqrt{1-v^2}}{v^2} \mathbf{v} \times \mathbf{W}. \quad (51)$$

Учитывая (50), (51), формулы (48), (49) можно переписать в более компактном виде:

$$dT = \frac{1 + (\mathbf{W} + \mathbf{v} \times \Omega_W) \mathbf{r}}{\sqrt{1-v^2}} dt + \frac{\mathbf{v}d\mathbf{r}}{\sqrt{1-v^2}},$$

$$d\mathbf{R} = \left\{ \frac{1 + \mathbf{W}\mathbf{r}}{\sqrt{1-v^2}} \mathbf{v} + \Omega_W \times \mathbf{r} + \frac{1 - \sqrt{1-v^2}}{v^2\sqrt{1-v^2}} [\mathbf{v}(\Omega_W \times \mathbf{r})] \mathbf{v} \right\} dt + d\mathbf{r} + \frac{1 - \sqrt{1-v^2}}{v^2\sqrt{1-v^2}} (\mathbf{v}d\mathbf{r})\mathbf{v}.$$

Поделим (49) на (48) и введём в рассмотрение скорости

$$\mathbf{U} = \frac{d\mathbf{R}}{dT}, \quad \mathbf{u}_s = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

в системах отсчёта S и s . Они связаны уравнением

$$\mathbf{U} = \frac{(1 + \mathbf{W}\mathbf{r})\mathbf{v} + \sqrt{1-v^2}(\mathbf{u}_s + \Omega_W \times \mathbf{r}) + \frac{1 - \sqrt{1-v^2}}{v^2} [\mathbf{v}(\mathbf{u}_s + \Omega_W \times \mathbf{r})] \mathbf{v}}{1 + \mathbf{W}\mathbf{r} + \mathbf{v}(\mathbf{u}_s + \Omega_W \times \mathbf{r})}. \quad (52)$$

Обращая это равенство, получим

$$\mathbf{u}_s = \frac{(1 + \mathbf{W}\mathbf{r}) \left[\sqrt{1-v^2} \mathbf{U} - \mathbf{v} + \frac{1 - \sqrt{1-v^2}}{v^2} \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{U}) \right]}{1 - \mathbf{v}\mathbf{U}} - \Omega_W \times \mathbf{r}. \quad (53)$$

Заметим, что в формулах (52) и (53) величина $\mathbf{u}_s + \Omega_W \times \mathbf{r}$ является скоростью $\mathbf{u}$ точки в невращающейся системе отсчёта k , которая сопутствует системе s . Тогда эти формулы упрощаются и имеют вид (23), (24).

Приложение 2. Скорость точек системы отсчёта s

Из (52) видно, что для того, чтобы точки 3-пространства системы s покоились относительно её системы координат ($\mathbf{u}_s = 0$), необходимо, чтобы они двигались относительно S не со скоростью $\mathbf{U} = \mathbf{v}$, а со скоростью $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0$, где

$$\mathbf{U}_0 = \frac{(1 + \mathbf{W}\mathbf{r})\mathbf{v} + \sqrt{1 - v^2} \, \boldsymbol{\Omega}_W \times \mathbf{r} + \frac{1 - \sqrt{1 - v^2}}{v^2} [\mathbf{v} (\boldsymbol{\Omega}_W \times \mathbf{r})] \, \mathbf{v}}{1 + (\mathbf{W} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}_W) \, \mathbf{r}}.$$

Отсюда видно, что величина $\mathbf{v}$ не имеет смысла скорости точек системы отсчёта s . Раскладывая это выражение по степеням $\mathbf{r}$ в первом приближении, получим

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{v} + \sqrt{1 - v^2} \, \boldsymbol{\Omega}_W \times \mathbf{r} - \frac{\sqrt{1 - v^2}(1 - \sqrt{1 - v^2})}{v^2} [\mathbf{v}(\boldsymbol{\Omega}_W \times \mathbf{r})] \, \mathbf{v}. \quad (54)$$

Учтём, что

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}} \frac{d\mathbf{V}}{dT}.$$

Тогда собственные ускорение и угловая скорость будут равны

$$\mathbf{W} = \frac{\dot{\mathbf{V}}}{1 - V^2} + \frac{1 - \sqrt{1 - V^2}}{V^2 \sqrt{1 - V^2}^3} (\mathbf{V}\dot{\mathbf{V}})\mathbf{V}, \quad (55)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_W = \frac{1 - \sqrt{1 - V^2}}{V^2(1 - V^2)} \mathbf{V} \times \dot{\mathbf{V}}, \quad \dot{\mathbf{V}} = \frac{d\mathbf{V}}{dT}. \quad (56)$$

Из (55) видно, что

$$\dot{\mathbf{V}} = (1 - V^2)\mathbf{W} - \frac{(1 - V^2)(1 - \sqrt{1 - V^2})}{V^2} (\mathbf{V}\mathbf{W})\mathbf{V}. \quad (57)$$

Следовательно, подставив (57) в (26), получим (27), где $\mathbf{V}$ — скорость начала отсчёта s относительно S . Подставив в (54) величину (27), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_0 = & \mathbf{V} - \sqrt{1 - V^2} (\mathbf{V}\mathbf{r})\mathbf{W} + \frac{\sqrt{1 - V^2}(1 - \sqrt{1 - V^2})}{V^2} (\mathbf{V}\mathbf{r})(\mathbf{V}\mathbf{W})\mathbf{V} + \\ & + \sqrt{1 - V^2} \, \boldsymbol{\Omega}_W \times \mathbf{r} - \frac{\sqrt{1 - V^2}(1 - \sqrt{1 - V^2})}{V^2} [\mathbf{V}(\boldsymbol{\Omega}_W \times \mathbf{r})] \, \mathbf{V}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда (55), (56), получим

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{V} - \frac{1 - \sqrt{1 - V^2}}{V^2} (\mathbf{V}\mathbf{r})\dot{\mathbf{V}} - \frac{(1 - \sqrt{1 - V^2})^2}{V^4 \sqrt{1 - V^2}} (\mathbf{V}\mathbf{r})(\dot{\mathbf{V}}\mathbf{V})\mathbf{V} - \frac{1 - \sqrt{1 - V^2}}{V^2} (\dot{\mathbf{V}}\mathbf{r})\mathbf{V}.$$

Приложение 3. Преобразование аффинной скорости в сопутствующую невращающуюся систему отсчёта

Какова же зависимость $\omega^{\alpha\beta}$ от $\Omega^{\alpha\beta}$ согласно теории относительности? Выведем её из формулы вычитания скоростей (24). Подставим в (24) для малых $\mathbf{r}$ выражение (2) и соотношение (26) между функцией преобразования $\mathbf{v}(t)$ и скоростью $\mathbf{V}$ начала координат системы s . Ответ необходимо искать с точностью до членов, пропорциональных первой степени расстояния. При этом заметим, что второй множитель

числителя правой части (24) уже пропорционален компоненте r^α , поэтому с точностью до первых степеней r^α первый множитель можно положить равным 1, а знаменатель — равным $1 - V^2$. Далее, используя (26), нетрудно подсчитать, что

$$\begin{aligned}\sqrt{1-v^2} &= \sqrt{1-V^2} + \frac{(\dot{\mathbf{V}}\mathbf{V})(\mathbf{V}\mathbf{r})}{1-V^2}, \\ \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v^2} v^\alpha v^\beta &= \frac{1-\sqrt{1-V^2}}{V^2} V^\alpha V^\beta - \frac{(1-\sqrt{1-V^2})^2}{V^4(1-V^2)} (\mathbf{V}\dot{\mathbf{V}})(\mathbf{V}\mathbf{r}) V^\alpha V^\beta - \\ &\quad - \frac{1-\sqrt{1-V^2}}{V^2\sqrt{1-V^2}} (\mathbf{V}\mathbf{r})(\dot{V}^\alpha V^\beta + \dot{V}^\beta V^\alpha).\end{aligned}$$

Учитывая эти соображения, можно найти, что

$$\begin{aligned}u^\alpha &= \frac{1-\sqrt{1-V^2}}{V^2\sqrt{1-V^2}^3} (\dot{\mathbf{V}}\mathbf{V})(\mathbf{V}\mathbf{r}) V^\alpha + \frac{(\mathbf{V}\mathbf{r})}{1-V^2} \dot{V}^\alpha + \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} \Omega^{\alpha\beta} L^\beta + \\ &\quad + \frac{1-\sqrt{1-V^2}}{V^2(1-V^2)} (\Omega^{\beta\gamma} V^\beta L^\gamma) V^\alpha,\end{aligned}\quad (58)$$

где L^α определяется из формулы сокращения Лоренца. В первом порядке расстояние $\mathbf{L}$ от точки до начала координат системы k , рассматриваемое относительно S , равно

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} - \frac{1-\sqrt{1-V^2}}{V^2} (\mathbf{r}\mathbf{V})\mathbf{V}.$$

Подставив эту формулу в (58) и сравнив получившееся выражение с (25), можно получить равенство (28). Данная величина должна быть инвариантом при выполнении буста.

Из (28) можно найти угловую скорость ω^α главных осей аффинного тензора (5) и тензор скорости центрального растяжения $s^{\alpha\beta}$ (6). Вычисления дают

$$\begin{aligned}\omega^\alpha &= \frac{e^{\alpha\mu\nu}(\Omega^{\nu\mu} - \Omega^{\mu\nu})}{4\sqrt{1-V^2}} - \frac{1-\sqrt{1-V^2}}{4V^2\sqrt{1-V^2}} e^{\alpha\mu\nu} V^\gamma (\Omega^{\nu\gamma} V^\mu - \Omega^{\mu\gamma} V^\nu) + \\ &\quad + \frac{1-\sqrt{1-V^2}}{4V^2(1-V^2)} e^{\alpha\mu\nu} V^\gamma (\Omega^{\gamma\mu} V^\nu - \Omega^{\gamma\nu} V^\mu) + \frac{e^{\alpha\mu\nu}}{2(1-V^2)} V^\mu \dot{V}^\nu, \\ s^{\alpha\beta} &= \frac{\Omega^{\alpha\beta} + \Omega^{\beta\alpha}}{2\sqrt{1-V^2}} - \frac{1-\sqrt{1-V^2}}{2V^2\sqrt{1-V^2}} V^\gamma (\Omega^{\alpha\gamma} V^\beta + \Omega^{\beta\gamma} V^\alpha) + \\ &\quad + \frac{1-\sqrt{1-V^2}}{2V^2(1-V^2)} V^\gamma (\Omega^{\gamma\beta} V^\alpha + \Omega^{\gamma\alpha} V^\beta) - \frac{(1-\sqrt{1-V^2})^2}{V^4(1-V^2)} (\Omega^{\gamma\mu} V^\gamma V^\mu) V^\alpha V^\beta + \\ &\quad + \frac{1-\sqrt{1-V^2}}{V^2\sqrt{1-V^2}^3} (\mathbf{V}\dot{\mathbf{V}}) V^\alpha V^\beta + \frac{\dot{V}^\alpha V^\beta + V^\alpha \dot{V}^\beta}{2(1-V^2)}.\end{aligned}$$

Введём аналогично (4)–(6) симметричный тензор $S^{\alpha\beta}$ и вектор Ω^α , дуальный антисимметричной части $\Omega^{\alpha\beta}$:

$$\Omega^\alpha = \frac{1}{4} e^{\alpha\mu\nu} (\Omega^{\nu\mu} - \Omega^{\mu\nu}), \quad S^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\Omega^{\alpha\beta} + \Omega^{\beta\alpha}). \quad (59)$$

Значит,

$$\Omega^{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta} + e^{\alpha\gamma\beta} \Omega^\gamma. \quad (60)$$

Тогда формулы (28) можно несколько упростить. Используя равенства (59), (60), находим формулы (29) и (30).

Приложение 4. Преобразование собственной аффинной скорости в лабораторную систему отсчёта

Зависимость $\omega^{\alpha\beta}$ от $\Omega^{\alpha\beta}$ можно было бы найти непосредственно из (28). Мы поступим по-другому и выведем её из (23), (24). Очевидно, что во втором и третьем слагаемом числителя и в знаменателе с требуемой точностью $\mathbf{v}$ можно заменить на $\mathbf{V}$. Тогда, подставив в (23) формулу (1) и в первое слагаемое числителя — (26), получим, раскладывая дробь с точностью до первых степеней $\mathbf{r}$,

$$U^\alpha = V^\alpha - \frac{(\mathbf{V}\mathbf{r}) \dot{V}^\alpha}{\sqrt{1-V^2}} + \sqrt{1-V^2} \omega^{\alpha\beta} r^\beta - \frac{\sqrt{1-V^2}(1-\sqrt{1-V^2})}{V^2} \omega^{\gamma\beta} V^\gamma V^\alpha r^\beta.$$

Подставим сюда вместо $\mathbf{r}$ выражение, обратное формуле сокращения Лоренца,

$$\mathbf{r} = \mathbf{L} + \frac{1-\sqrt{1-V^2}}{V^2\sqrt{1-V^2}}(\mathbf{L}\mathbf{V})\mathbf{V}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} U^\alpha = & V^\alpha + \sqrt{1-V^2} \omega^{\alpha\beta} L^\beta - \frac{\sqrt{1-V^2}(1-\sqrt{1-V^2})}{V^2} (\omega^{\gamma\beta} V^\gamma L^\beta) V^\alpha + \\ & + \frac{1-\sqrt{1-V^2}}{V^2} (\mathbf{V}\mathbf{L}) \omega^{\alpha\gamma} V^\gamma - \frac{(1-\sqrt{1-V^2})^2}{V^4} (\mathbf{V}\mathbf{L})(\omega^{\gamma\mu} V^\gamma V^\mu) V^\alpha - \frac{(\mathbf{V}\mathbf{L}) \dot{V}^\alpha}{1-V^2}. \end{aligned} \quad (61)$$

Выражение (61) нельзя представить в виде $U^\alpha = V^\alpha + \dot{L}^\alpha = V^\alpha + e^{\alpha\beta\gamma} \Omega^\beta L^\gamma$ с некоторым Ω^α , значит, аффинное движение точек в системе k относительно лабораторной системы S не является жёстким. Сравнивая (61) с (2), окончательно получим равенство (36).

Формулу (36) можно несколько упростить, вводя аналогично (4)–(6) симметричный тензор $S^{\alpha\beta}$ и вектор Ω^α , дуальный антисимметричной части $\Omega^{\alpha\beta}$, по формулам (59), (60). Их подстановка в (36) даёт

$$\begin{aligned} \Omega^\alpha = & \frac{\sqrt{1-V^2}}{4} e^{\alpha\mu\nu} (\omega^{\nu\mu} - \omega^{\mu\nu}) - \frac{\sqrt{1-V^2}(1-\sqrt{1-V^2})}{4V^2} e^{\alpha\mu\nu} (\omega^{\gamma\mu} V^\nu - \omega^{\gamma\nu} V^\mu) V^\gamma + \\ & + \frac{1-\sqrt{1-V^2}}{4V^2} e^{\alpha\mu\nu} (\omega^{\nu\gamma} V^\mu - \omega^{\mu\gamma} V^\nu) V^\gamma - \frac{e^{\alpha\mu\nu}}{4(1-V^2)} (V^\mu \dot{V}^\nu - V^\nu \dot{V}^\mu), \quad (62) \\ S^{\alpha\beta} = & \frac{\sqrt{1-V^2}}{2} (\omega^{\alpha\beta} + \omega^{\beta\alpha}) - \frac{\sqrt{1-V^2}(1-\sqrt{1-V^2})}{2V^2} (\omega^{\gamma\beta} V^\alpha + \omega^{\gamma\alpha} V^\beta) V^\gamma - \\ & - \frac{(1-\sqrt{1-V^2})^2}{V^4} (\omega^{\gamma\mu} V^\gamma V^\mu) V^\alpha V^\beta + \frac{1-\sqrt{1-V^2}}{2V^2} (\omega^{\alpha\gamma} V^\beta + \omega^{\beta\gamma} V^\alpha) V^\gamma - \frac{V^\beta \dot{V}^\alpha + V^\alpha \dot{V}^\beta}{2\sqrt{1-V^2}}. \end{aligned} \quad (63)$$

Учитывая (4)–(6), получим (37) и (38).

Список литературы

1. **Dewan, E.** Note on stress effects due to relativistic contraction / E. Dewan, M. Beran // American Journal of Physics. — 1959. — Vol. 27, no. 7. — P. 517–518.
2. **Степанов, С. С.** Прецессия Томаса для спина и стержня / С. С. Степанов // Физика элементарных частиц и атомного ядра. — 2012. — Т. 43, № 1. — С. 245–282.
3. **Беклемишев, Д. В.** Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. — 320 с.

4. **Седов, Л. И.** Кинематика сплошной среды. Т. 1 / Л. И. Седов. — М. : Наука, 1970. — 492 с.
5. **Джексон, Д.** Классическая электродинамика / Д. Джексон. — М. : Мир, 1965. — 703 с.
6. **Møller, C.** On homogeneous gravitational fields in the general theory of relativity and the clock paradox / C. Møller // Matematisk-fysiske meddelelser Kongelige Danske Videnskabernes Selskab. — 1943. — Vol. 20, no. 19. — P. 3–25.
7. **Мёллер, К.** Теория относительности / К. Мёллер. — М. : Атомиздат, 1975. — 400 с.
8. **Nelson, R. A.** Generalized Lorentz transformation for an accelerated, rotating frame of reference / R. A. Nelson // Journal of Mathematical Physics. — 1987. — Vol. 28, no. 10. — P. 2379–2383.
9. **Nikolić, H.** Relativistic contraction and related effects in noninertial frames / H. Nikolić // Physical Review A. — 2000. — Vol. 61, no. 3. — P. 032109.
10. **Pauri, M.** Märzke — Wheeler coordinates for accelerated observers in special relativity / M. Pauri, M. Vallisneri // Foundations of Physics Letters. — 2000. — Vol. 13, no. 5. — P. 401–425.
11. **Mashhoon, B.** Length measurement in accelerated systems / B. Mashhoon, U. Muench // Annalen der Physik. — 2002. — Vol. 11, no. 7. — P. 532–547.
12. **Bini, D.** Spin–rotation couplings: spinning test particles and Dirac field / D. Bini, L. Lusanna // General Relativity and Gravitation. — 2008. — Vol. 40, no. 6. — P. 1145–1177.
13. **Мизнер, Ч.** Гравитация. Т. 1 / Ч. Мизнер, К. Торн, Д. Уилер. — М. : Мир, 1977. — 480 с.
14. **Войтик, В. В.** Радиально-жесткая неинерциальная система отсчёта и форминвариантность общего преобразования / В. В. Войтик, Н. Г. Мигранов // Инновации в науке : тр. XIX междунар. заоч. науч.-практ. конф. 22 апреля 2013 г. — Новосибирск : СибАК, 2013. — С. 7–19.
15. **Föppl, L.** Zur Kinematik des Born'schen starren Körpers / L. Föppl, P. Daniell // Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft Wissenschaften zu Göttingen. — 1913. — P. 519–529.
16. **Irvine, W. M.** Electrodynamics in a rotating system of reference / W. M. Irvine // Physica. — 1964. — Vol. 30, no. 6. — P. 1160–1170.
17. **Владимиров, Ю. С.** Системы отсчёта в теории гравитации / Ю. С. Владимиров. — М. : Энергоиздат, 1982. — 256 с.
18. **Малыкин, Г. Б.** Прецессия Томаса: корректные и некорректные решения / Г. Б. Малыкин // Успехи физ. наук. — 2006. — Т. 176, № 8. — С. 865–882.
19. **Corben, H. C.** Factors of 2 in magnetic moments, spin-orbit coupling, and Thomas precession / H. C. Corben // American Journal of Physics. — 1993. — Vol. 61, no. 6. — P. 551–553.

Поступила в редакцию 02.03.2020.

После переработки 31.05.2020.

Сведения об авторах

Войтик Виталий Викторович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры медицинской физики с курсом информатики, Башкирский государственный медицинский университет, Уфа, Россия; e-mail: voytik1@yandex.ru.

Мигранов Наиль Галиханович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры медицинской физики с курсом информатики, Башкирский государственный медицинский университет, Уфа, Россия; e-mail: ufangm@yandex.ru.

THE TRANSFORMATION OF THE AFFINE VELOCITY AND ITS APPLICATION TO A ROTATING DISK

V.V. Voytik^a, N.G. Migranov^b

Bashkirian State Medical University, Ufa, Russia

^avoytik1@yandex.ru, ^bufangm@yandex.ru

The aim of the article is to find a transformation that links the local affine velocity of a non-rigid body in the laboratory inertial reference frame S with the centroaffine velocity of this body in the accompanying nonrotating reference frame k . This paper is based on the kinematics of a continuous medium and the generalized Lorentz transformation. In the paper we show the 3D transformation of the velocity linking the reference system S and the reference system k , which moves without the rotation. Wherein the motion of various points of the rigid system k is inhomogeneous. Using these formulas, we obtain the desired direct and inverse transformations of the local affine velocity. Important special cases of this transformation are considered. They are the motion of particles in a uniform force field and the precession of Thomas. As an example of using the transformation of the affine velocity in S , accelerated rotation of a disk is considered and the local angular velocity and the magnitude of the deformation of its points are calculated. The calculated stretching coefficient is consistent with the known one, and the formula found for the angular velocity is more general than the earlier result obtained for uniform rotation of a disk.

Keywords: *the generalized Lorentz transformation, affine motion, angular velocity, the strain rate, Thomas precession, Wigner rotation.*

References

1. Dewan E., Beran M. Note on stress effects due to relativistic contraction. *American Journal of Physics*, 1959, vol. 27, no. 7, pp. 517–518.
2. Stepanov S.S. Thomas precession for spin and for a rod. *Physics of Particles and Nuclei*, 2012, vol. 43, no. 1, pp. 128–145.
3. Beklemishev D.V. Kurs analiticheskoy geometrii i lineynoy algebrы [The course of analytical geometry and linear algebra]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 320 p. (In Russ.).
4. Sedov L.I. *Mechanics Of Continuous Media*. World Scientific, 1997. 1368 p.
5. Jackson J.D. *Classical Electrodynamics*. New York, John Wiley & Sons, 1962. 641 p.
6. Møller C. On homogeneous gravitational fields in the general theory of relativity and the clock paradox. *Matematisk-fysiske meddelelser Kongelige Danske Videnskabernes Selskab*, 1943, vol. 20, no. 19, pp. 3–25.
7. Møller C. *The Theory of Relativity*. Oxford, Clarendon Press, 1972.
8. Nelson R.A. Generalized Lorentz transformation for an accelerated, rotating frame of reference. *Journal of Mathematical Physics*, 1987, vol. 28, no. 10, pp. 2379–2383.
9. Nikolić H. Relativistic contraction and related effects in noninertial frames. *Physical Review A*, 2000, vol. 61, no. 3, p. 032109.
10. Pauri M., Vallisneri M. Märzke — Wheeler coordinates for accelerated observers in special relativity. *Foundations of Physics Letters*, 2000, vol. 13, no. 5, pp. 401–425.
11. Mashhoon B., Muench U. Length measurement in accelerated systems. *Annalen der Physik*, 2002, vol. 11, no. 7, pp. 532–547.
12. Bini D., Lusanna L. Spin–rotation couplings: spinning test particles and Dirac field. *General Relativity and Gravitation*, 2008, vol. 40, no. 6, pp. 1145–1177.

13. **Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A.** *Gravitation*. Vol. 1. San Francisco, Freeman, 1973. 1278 p.
14. **Voytik V.V., Migranov N.G.** Radial'no-zhyostkaya neinertsial'naya sistema otschyota i forminvariantnost' obshchego preobrazovaniya [Radial-rigid non-inertial reference frame and forminvariance of the general transformation]. *Trudy XIX mezhdunarodnoy zaochnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii "Innovatsii v nauke"* [Proceedings of the XIX International Correspondence Scientific-Practical Conference "Innovations in Science"], 22.04.2013. Novosybirsk, SibAK Publ., 2013. Pp. 7–19. (In Russ.).
15. **Föppl L., Daniell P.** Zur Kinematik des Born'schen starren Körpers. *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft Wissenschaften zu Göttingen*, 1913, pp. 519–529.
16. **Irvine W.M.** Electrodynamics in a rotating system of reference. *Physica*, 1964, vol. 30, no. 6, pp. 1160–1170.
17. **Vladimirov Yu.S.** *Sistemy otschyota v teorii gravitatsii* [Reference frames in the theory of gravity]. Moscow, Energoizdat Publ., 1982. 256 p. (In Russ.).
18. **Malykin G.B.** Thomas precession: correct and incorrect solutions. *Physics Uspekhi*, 2006, vol. 49, no. 8, pp. 837–853.
19. **Corben H.C.** Factors of 2 in magnetic moments, spin-orbit coupling, and Thomas precession. *American Journal of Physics*, 1993, vol. 61, no. 6, p. 551–553.

Accepted article received 02.03.2020.

Corrections received 31.05.2020.